الفـصل الثامـن ..

المحـــــــدات .

تعريف: اذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة n×n فإنه يوجد عدد حقيقي يرافق هذه المصفوفة ويرمز له بالرمز $|A|$ او محدد A او det (A) .. وسنتعرف في هذا الفصل على كيفية ايجاد محدد مصفوفة من الرتبة $|X|$ ..2×2 و 3×3 .

اولا : محدد مصفوفة من الرتبة 1×1 :

اذا كانت $A = [a_{11}]$ فإن $det(A) = |A| = a_{11}$ ..

مثال: اذا كانت $A = [-5]$ فإن $det(A) = |A| = -5$

ثانيا: مصفوفة الرتبة 2×2:

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فإن $det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

محدد مصفوفة من الرتبة 2×2 هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي .

مثال: اوجد محدد المصفوفات التالية:

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

الحل : $|A| = 2\times -1 - 3\times 2$

$= -2 - 6 = -8$

- $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

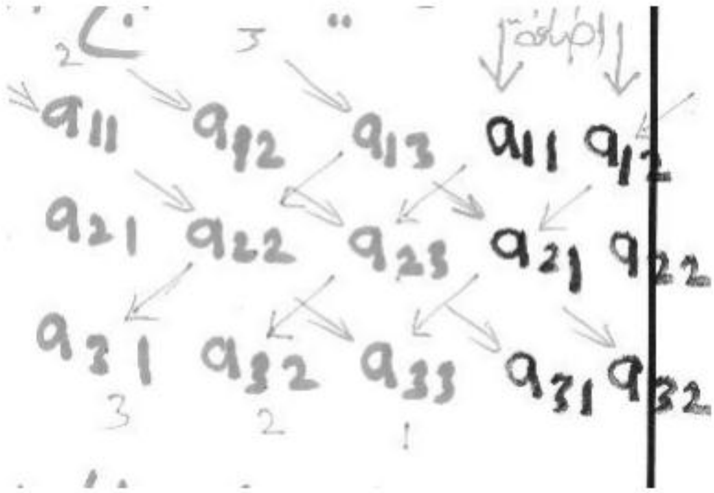
الحل : $|B| = 0 \times (-1) - (-2)(3)$

$= 0 - (-6) = 6$

ب: طريقة ساويرس: تتلخص الطريقة بأن نضيف على المصفوفة العمود الأول والثاني كعمودين رابع وخامس على التوالي لتصبح المصفوفة على الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

التوضيح:



وعليه فأن محدد المصفوفة A يصبح على الصورة التالية :

$$Det(A)= |A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{12} a_{21} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{22} a_{31})$$

ثالثا: محدد مصفوفة من الرتبة 3×3:

هناك عدة طرق لحساب محدد هذا النوع من المصفوفات ومنها:

- اذا كانت : $A= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

فأن: $det(A) = |A| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$

" طريقة المحددات الصغرى" ..

مثال: اوجد محدد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} ?$$

الحل:

$$|A| = -2 (0 - 18) -2 (0 - 24) + 3 (3-(-20)) = 36 +48 +69 = 153$$

مثال: باستخدام طريقة ساويرس اوجد $|A|$ ؟

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = (0 + 48 +9) - (0 + -36 + -60) = 57 +96 = 153$$

للتوضيح :

اتجاه رئيسي

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 6 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 \end{array}$$

اتجاه ثانوي

$$|A| = (0 + 48 + 9) - (0 + {-36} + {-60})$$

مثال: اوجد محدد المصفوفة :

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ حسب الطريقة الاولى والطريقة الثانية ؟

الحل :

- باستخدام المحددات الصغرى:

$|B| = 0\,(0+5) - 1\,(2 \times 0 - 5) + -1\,(-2-3) = 0 + 5 + 5 = 10$

- باستخدام طريقة ساويرس:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$|B| = (0 + 5 + 2) - (0 + 0 + 3) = 7 + 3 = 10$

مسائل وتمارين:

١. اوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

٢. اذا كانت:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ X & -1 \end{bmatrix}$ وكان $|A| = 2$ اوجد قيمة X ؟؟

انتهت المحاضرة ..

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A^3 ؟

الحل:

$$A^3 = \underbrace{A \times A}_{} \times A$$

$$= A^2 \times A .$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+^-3 & 6+0 \\ ^-2+0 & ^-3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & ^-3 \end{bmatrix} = A$$

2x2

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+^-6 & 3+0 \\ ^-4+2 & -6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ^-4 & 3 \\ ^-1 & -6 \end{bmatrix} .$$

$A \cdot A^2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6+^-6 & 12+^-9 \\ ^-3+0 & -6+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

مسائل وتمارين :.

اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 8 & -2\end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-3\\ -1\end{bmatrix}_{2\times 1}$$

أوجد :.

1) AB

2) BA

3) A^2

4) B^2.

علمتني الرياضيات : أن الانتقال من جهة لأخرى سيغير من قيمتي وانه متى ما كبر المقام صغر كل شئ

E7sas