

الفصل الثاني

الاسس و اللوغاريتمات

المحاضرة السابقة: العمليات الجبرية

ناتج العملية الحسابية

$$2 - 6 \times \{ (20 \div 10) - 5 \} = 20$$

$$2 - 6 \times \{-3\} = 2 + 18 = 20$$

الجواب

صحيحة

A) صحيحة

B) خاطئة

الاسس و اللوغاريتمات

الاهداف الرئيسية :

- ❖ التعرف على الاسس و خواصهم
- ❖ التعرف على اللوغاريتمات و خواصهم
- ❖ تطبيق الاسس و اللوغاريتمات في تبسيط العمليات

الاسس Exponents :

تعريف: اذا كان $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ فإن :

$$a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$$

حيث تقرأ a^n اس a n

$$\text{مثال: } 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

الاسس Exponents : الاسس هي عملية الرفع الى القوى او هي اختصار لعملية تكرار ضرب العدد في نفسه

$$a \times a \times a \times a \times \dots n - \text{time} = a^n$$

اس

اساس

فمثلاً :

$$\begin{aligned} 2 \times 2 = 2^2 &\Rightarrow \text{تقرأ 2 أس 2 أو مربع العدد 2 (أو تربيع)} \\ 2 \times 2 \times 2 = 2^3 &\Rightarrow \text{تقرأ 2 أس 3 (أو تكعيب)} \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 &\Rightarrow \text{تقرأ 2 أس 4} \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 &\Rightarrow \text{تقرأ 2 أس 5} \\ &\dots \dots \dots \text{وهكذا} \end{aligned}$$

تعريف : اذا كان $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ فإن :

$$!!) a^{-n} = \frac{1}{a^n} ,) a^0 = 1$$

مثال : اختصر كل من :

$$1) 8^0 \rightarrow 8^0 = 1$$

$$2) 2^{-4} \rightarrow 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$3) (3)^{-2} \rightarrow (3)^{-2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$4) \left(\frac{1}{2}\right)^6 (200)^0 \rightarrow \frac{1^6}{2^6} (200)^0 = \frac{1}{2^6} (1) = \frac{1}{64}$$

قوانين الاسس (خواص الاسس)

اذا كان $n, m \in \mathbb{Z}$ وكان $x, y \in \mathbb{R}$ فإن :

$$!) X^m \cdot X^n = X^{m+n}$$

مثال : اختصر كل من :

$$1) (2)^2 \cdot (2)^4 = (2)^{2+4} \\ = (2)^6 = 64$$

$$2) (3)^8 \cdot (3)^{-5} = (3)^{8+(-5)} \\ = (3)^{8-5} = (3)^3 = 27$$

$$3) (2)^9 \cdot (2)^{-5} = 16$$

$$!!) \frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$$

مثال : اختصر كل من :

$$1) \frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

$$2) \frac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = 7^2 = 49$$

$$3) \frac{3^3}{3^{-2}} = 3^{3-(-2)} = 3^{3+2} = 3^5 = 243$$

$$!!!) (X^m)^n = X^{m \cdot n}$$

مثال اختصر كل من :

$$1) (2^3)^2 = 2^6 = 64 \quad , \quad 2) (3^3)^{-3} = 3^{-9} = \frac{1}{3^9}$$

$$iv) x^m \cdot y^m = (xy)^m$$

مثال اختصر كل من :

$$1) 3^2 \cdot 2^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36 \quad , \quad 2) 5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$$

$$v) \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m \rightarrow \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

مثال : اوجد قيمة كل من باستخدام قوانين الأسس:

$$1) (2)^3 \cdot (2)^5 = (2)^{3+5} = (2)^8 \quad , \quad 2) (a^3 b^4)^5 = (a^3)^5 (b^4)^5 = a^{15} b^{20}$$

مثال : ضع المقدار التالي في أبسط صورته $\frac{(81)^n}{(9)^n}$.

$$\frac{(81)^n}{(9)^n} = \frac{(3^4)^n}{(3^2)^n} = \frac{(3)^{4n}}{(3)^{2n}} = \frac{(3)^{4n}}{(3)^{2n}} = (3)^{4n-2n} = (3)^{2n}$$

$$\frac{(16x)^3}{(32x)^2} = \frac{(2^4 x)^3}{(2^5 x)^2} = \frac{2^{12} x^3}{2^{10} x^2} = 2^{12-10} x^{3-2} = 2^2 x = 4x$$

اللوغاريتمات Logarithms : اللوغاريتمات هي العملية العكسية للأسس .

$$a^x = y \leftrightarrow \log_a y = x$$

$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad , \quad y \in \mathbb{R}^+$$

وتقرأ لوغاريتم y بالنسبة للأساس a يساوي x

مثال :

$$1) 7^2 = 49 \leftrightarrow \log_7 49 = 2$$

$$2) 5^0 = 1 \leftrightarrow \log_5 1 = 0$$

$$3) 10^{-1} = \frac{1}{10} \leftrightarrow \log_{10} \frac{1}{10} = -1$$

$$4) 8^{2/3} = 4 \leftrightarrow \log_8 4 = 2/3$$

ملاحظات هامة: التعبيرات التالية خاطئة (لامتني لها):

$$\log_2(-8), \log_{-2}(8), \log_3(0), \log_0(3), \log_1(3)$$

مثال: عبر عما يأتي بصوره لوغاريتميه log:

$$i) 9^2 = 81 \rightarrow \log_9(81) = 2$$

$$, ii) \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{27} \rightarrow \log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{125}{27}\right) = -3$$

قوانين اللوغاريتمات:

ليكن $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $X, y \in \mathbb{R}^+$ فإن:

$$1) \log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$2) \log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$3) \log_b M^n = n \log_b M$$

$$4) \log_a a = 1$$

$$5) \log_a 1 = 0$$

$$X > 0, \quad 6) \log_a \left(\frac{1}{X}\right) = -\log_a X$$

مثال: احسب قيمة كلا من:

$$i) \log_6 1$$

$$ii) \log_2 2$$

$$iii) \log_2 2^3$$

$$iv) \log_{10} 100$$

الحل:

$$i) \log_6 1 = 0$$

$$ii) \log_2 2 = 1$$

$$iii) \log_2 2^3 = 3$$

$$iv) \log_{10} 100 = 2$$

تمارين : اكتب ما يلي بالصورة اللوغاريتمية :

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

$$2^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \log_2 16 = 4$$

$$5^x = 125$$

$$\Leftrightarrow \log_5 125 = 3$$

$$6^y = 36$$

$$3^x = \frac{1}{9}$$

لو أنك لا تصادق إلا إنساناً لا عيب فيه لما صادقت نفسك.

E7sas