

المجموعات والعمليات عليها

الاهداف الرئيسية – key objectives

- ❖ التعرف على المجموعة ومعرفة خصائصها
- ❖ تمييز بين طرق التعبير عن المجموعات
- ❖ التفريق بين الانتماء والاحتواء
- ❖ معرفة اهم العمليات الاساسية على المجموعات وطرق تمثيلها

المجموعات – sets

المجموعة :

- هي تجمع من الاشياء المختلفة المعرفة تعريفا جيدا.
- هذه الاشياء تسمى عناصر المجموعة ويشترط ان تكون المجموعة محددة تماما بمعنى انه يمكن الحكم على أي شيء معطى هل هو ضمن عناصر المجموعة ام لا من غير اختلاف في ذلك الحكم .

الترميز :

- نرمز للمجموعات بحروف انجليزية كبيرة مثل $A, B, C, \dots$
- وللعناصر بحروف انجليزية صغيرة مثل $a, b, c, \dots$

ملاحظه :

لا يجوز التكرار في عناصر المجموعة ،
لا نهتم بترتيب عناصر المجموعة.

كيف تكتب المجموعة : $A = \{1, 2, 3, 4, a, b, \dots\}$

هناك بعض المجموعات لها رموز خاصة بها مثل :

نرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بـ : N

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعة الاعداد الصحيحة ويرمز لها بالرمز Z

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

مجموعة الأعداد النسبية نرمز لها بـ : Q

مجموعة الأعداد الحقيقية نرمز لها بـ : R

الرجاء التركيز على طريقة كتابة قوس المجموعة { }
القوس الدائري () يسمى زوج مرتب وله تعريف ثاني

- **المجموعة المنتهية :** هي المجموعة التي يمكن تحديدها أو يمكن الانتهاء من عد عناصرها مثل : $A=\{1,2,3\}$
- **المجموعة الغير منتهية :** هي المجموعة التي لا يمكن الانتهاء من عد عناصرها وبالتالي لا يمكن كتابتها بذكر جميع هذه العناصر مثل : $B=\{2,3,4,....\}$

- **المجموعة الشاملة:** هي مجموعة جميع العناصر المتاحة ، وتكون أي مجموعة أخرى هي مجموعة جزئية منها .
مثال : المجموعة $U=\{0,1,2,3,4,5\}$ تصلح ان تكون مجموعة شاملة للمجموعات الآتية :
 $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0,1,2,3,5\}$, $C=\{4,5\}$
لأنها تحتوي على جميع العناصر الموجودة في هذه المجموعات .

قاعده مهمة :

- المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة ،
- المجموعة الخالية وحيدة .

 $A = \{b\}, \quad B = \{5\}$

- **المجموعة المتممة :** اذا كانت U مجموعة شاملة و $A \subset U$ فان متممة A نرمز لها بالرمز A^c وهي مجموعة العناصر التي تنتمي الى U كما وتعرف A الى تنتمي ولا U يلي :

$$A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$
مثال : اذا كانت :

$A^c, B^c, (A^c)^c$ اوجد $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 4, 6, 7\}$

$A^c = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$: الحل

$$B^c = \{1, 2, 5, 8, 9\}$$

$$(A^c)^c = \{2, 4, 6\} = A$$

تمرین : فی المثال السابق اوجد $(B^C)^C$

الانتماء :

إذا كانت A مجموعة وكان a عنصرا منها فأنتنا نقول ان : a ينتمي الى المجموعة A ويكتب $a \in A$.
 اما اذا وجد عنصر b ليس من ضمن عناصر A فأنتنا نقول ان : العنصر b لا ينتمي الى المجموعة A ويكتب $b \notin A$.

طرق التعبير عن مجموعة :

هناك ثلاث طرق تستخدم غالبا للتعبير عن مجموعة معينة وهي :

(a) طريقة سرد العناصر : وذلك عندما يكون عدد عناصر المجموعة A منتهيًا بحيث يمكن كتابة جميع العناصر في الصورة

$$A = \{ \dots \}$$

مثال : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- (b) **طريقة الصفة المميزة** : وتستخدم هذه الطريقة اذا وجدت خاصية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها من العناصر .
 مثال : اكتب المجموعة $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$ بطريقة الصفة المميزة !
 الحل : $A = \{x : x \text{ عدد طبيعي}, 2 \leq x \leq 8\}$

- (c) **طريقة التسلسل المنطقي** : وتستخدم اذا كان عدد العناصر كبيرا او غير منته .
 مثال : عند كتابة مجموعة الاعداد الفردية الموجبة فأنا نكتب : $O=\{1,3,5,7,\dots\}$
 وعند كتابة الاعداد المحصورة بين 1 و 100 فأنا نكتب $B=\{1,2,\dots,100\}$

امثلة متنوعة :

١ – اكتب كلا من المجموعات الاتية بطريقة السرد :

i. $A=\{x : (x \in N) \wedge (5 < x < 10)\}$

ii. $B=\{x : (x \in N) \wedge 5 \leq x \leq 10\}$

الحل :
 1- $A=\{6,7,8,9\}$
 2- $B=\{5,6,7,8,9,10\}$

٢- اكتب كلا من المجموعات الاتية بطريقة السرد :

i. $A=\{2,4,6,8,10\}$

ii. $B=\{5,10,15,\dots\}$

الحل : عدد زوجي $x \wedge (2 \leq x \leq 10) \wedge (x \in N)$ $A=\{x : (x \in N) \wedge (2 \leq x \leq 10) \wedge x \text{ زوجي}\}$

$B=\{x : x \in N \wedge 5x\}$ مضاعفات 5

تمرين : اكتب المجموعة الاتية بطريقة الصفة المميزة : $C=\{2,3,4,6\}$

العمليات على المجموعات :الاحتواء :

نقول ان المجموعة A تحتوي المجموعة B (المجموعة B محتواه في المجموعة A) اذا كان : كل عنصر من عناصر B ينتمي الى A ونكتب ذلك رمزيا بالشكل $B \subseteq A$

ملاحظات :

- ١- المجموعة B محتواه في المجموعة A ونعبر عنها احيانا بقولنا ان B جزئية من A
- ٢- اذا كانت لا ينتمي A بحيث يوجد على الاقل عنصر في $B \subseteq A$ الى B فأننا نقول ان B مجموعة جزئية فعلية من A وتكتب $B \subset A$

تساوي مجموعتين :

تتساوى المجموعتان A, B اذا كان كل عنصر من A ينتمي الى B وكان كل عنصر الى من B ينتمي الى A أي ان A, B لهما نفس العناصر .

مثال : $B = \{2, 7, 5, 9\}$, $A = \{2, 5, 7, 9\}$

$$A = B$$

التقاطع :

اذا كانت A, B مجموعتين ، نعرف تقاطع هاتين المجموعتين بأنه مجموعة العناصر المشتركة بين A, B ونرمز لذلك بالرمز $A \cap B$ أي ان : $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

مثال : اذا كانت $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$

$$A \cap B = \{2, 5\}$$

الاتحاد :

اذا كانت $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

الفرق :

نعرف الفرق بين المجموعتين A, B بأنه مجموعة عناصر A التي لا تنتمي الى B ، ونرمز له بالرمز $A - B$ أي ان :

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

مثال : اذا كانت $A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$

$$A - B = \{1, 4, 6\}$$

تمرين : اوجد $B - A$ في المثال السابق!

الفرق التناظري

الفرق التناظري بين المجموعتين A, B والذي نرمز له بالرمز $A \Delta B$ جميع العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي الى B اتحاد $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ ولا تنتمي الى B ولا تنتمي الى A

ملاحظة : $A \Delta B = B \Delta A$

$$A \Delta A = \emptyset$$

$$A \Delta \emptyset = A$$

خواص العمليات على المجموعات

الخاصية	التقاطع	الاتحاد
الابتنال	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
التجميع	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
التوزيع	$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$	$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$
قانون دي مورجان	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

مثال : اذا كانت $A = \{1, 2, 4, 6\}$ ، $B = \{2, 5, 7\}$ فان :

$$A - B = \{1, 4, 6\} , B - A = \{5, 7\}$$

$$A \Delta B = \{1, 4, 5, 6, 7\}$$

مثال : ضع رمزا من الرموز التالية مكان النقاط لتحصل على عبارة صحيحة ($\subseteq$ ، $\in$ ، $\notin$ ، $=$ ، $\neq$)

i. $2 \notin \{3, 5, 7\}$

ii. $\{3, 5\} \subseteq \{5, 3\}$

iii. $\{6\} \subseteq \{4, 5, 6\}$

مثال : ما قيمة x التي تجعل العبارات الاتية صحيحة

i. $x=7$ $\{3, 7\} \subset \{x, 3, 5\}$

ii. $x=6$ $\{2, 3, x\} = \{6, 3, 2\}$

iii. $x=4$ or $x=7$ or $x=9$ $\{x, 1\} \subset \{4, 1, 7, 9\}$

مثال : اذا كان لدينا $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{2,4,6\}$ $B=\{3,4,6,7\}$

فأوجد : A^c , B^c , $(A^c)^c$, $(A \cup A^c)$, $(B \cap B^c)$

$$A^c = \{1,3,5,7,8\}$$

$$B^c = \{1,2,5,8\}$$

$$(A^c)^c = \{2,4,6\} = A$$

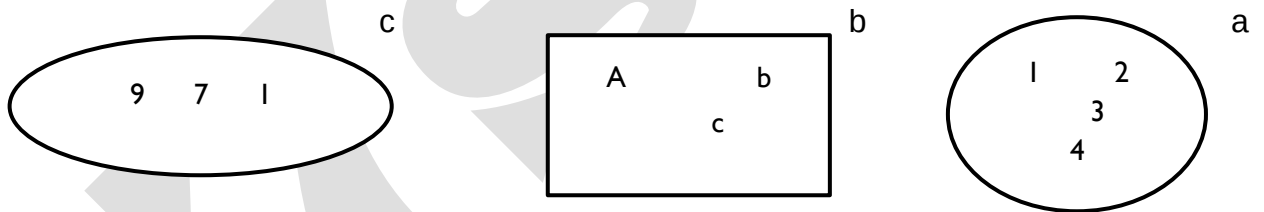
$$(A \cup A^c) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = U$$

$$(B \cap B^c) = \phi$$

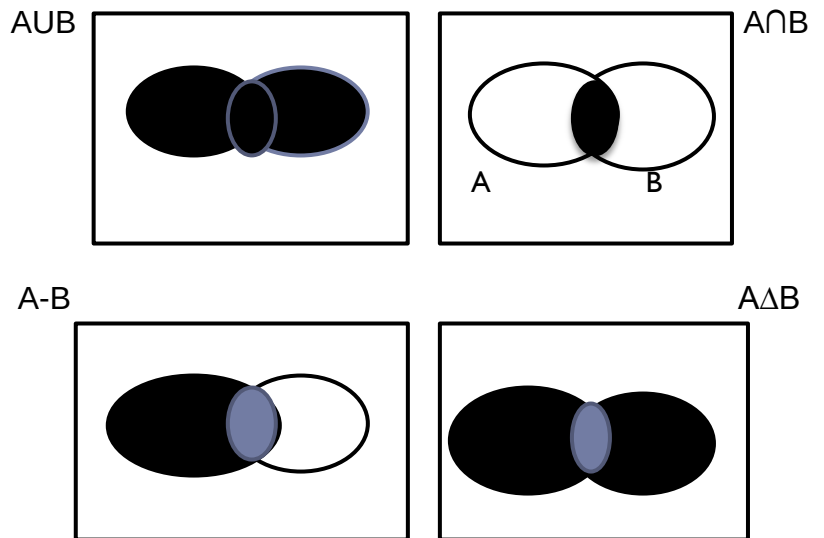
في المثال السابق اوجد $(B^c)^c$, $(A \cap A)$

تمثيل المجموعة على شكل فن :

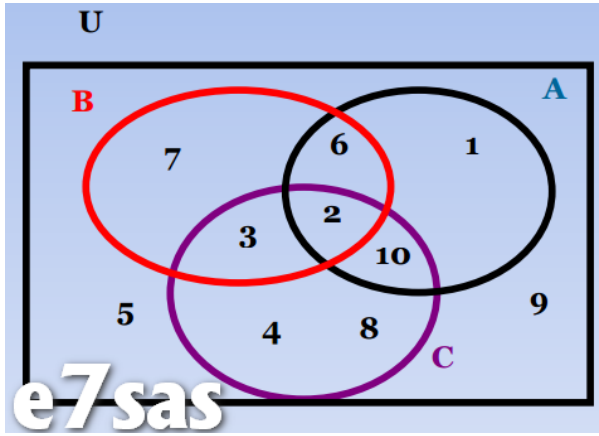
لقد مثل فن المجموعة بمساحة مستوية محاطة بمنحنى مغلق لا يتقاطع مع نفسه . ويعرف الشكل للمجموعة بشكل فن venn diagram
مثال : الاشكال الاتية تعتبر تمثيلا لبعض المجموعات :



مثال : باستخدام اشكال فن ، ظلل المجموعات التالية : $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \Delta B$



مثال : اذا كان : $U = \{X : (X \in \mathbb{N}) \wedge 1 \leq X < 11\}$ مجموعة شاملة وكانت A, B, C مجموعات جزئية من U حيث :
 $A = \{1, 2, 6, 10\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 4, 8, 10\}$ "ارسم شكل فن للمجموعات السابقة"



الحل : $A \cap B \cap C = \{2\}$

$$B \cap C = \{2, 3\}$$

$$(B \cap C)^c = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A - B = \{1, 10\}$$

$$A \Delta B = \{1, 3, 7, 10\}$$

تمرين: اذا كان $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ اوجد :

$$1) A \cap B \quad 3) A \cup B$$

$$2) A - B \quad 4) B - A \quad 5) A \Delta B$$

$$1) A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

$$2) A - B = \{8, 10\}$$

$$3) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

$$4) B - A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$5) A \Delta B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$$

تمرين : اذا كان $B = \{0, 2, 3, h\}$, $A = \{1, 2, 4, 6, a, h\}$

اوجد :

$$i) A \cap B \quad , \quad ii) A \cup B$$

$$iii) A - B \quad , \quad v) B - A$$

تذكر مراقبة الله لك

e7sas