

اي من المتتابعات التالية حسابية :

A) 0, 1, 2, 3, ...

B) -3, 3, 9, ...

C) -1, 2, 5, ...

D) -5, -10, -15 E) 3, 2, 1, -1

المتتابعات الهندسية

المتتابعة الهندسية : هي نوع اخر من المتتابعات له نمط مميز و يختلف عن المتتابعة الحسابية ، فهي تكون النسبة بين أي حد و سابقه يساوي مقدار ثابت ويسمى هذا الثبات بأساس المتتابعة الهندسية و يرمز له بالرمز r اي ان :

$$r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots$$

تعريف: إذا كانت $\{u_n\}$ متتابعة ، r عدد ثابت بحيث $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$ لجميع قيم n ، فإننا نسمى هذه المتتابعة متتابعة هندسية أساسها r .

مثال: بين اي مما يلي متتابعة هندسية :

a) 2, 4, 8, 16, ...

b) 7, 21, 24, 36, ...

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

d) $4, -3, \frac{9}{4}, -\frac{7}{16}, \dots$

الحل:

a) 2, 4, 8, 16, ...

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{u_4}{u_3} = \frac{16}{8} = 2$$

اذن هي متتابعة هندسية اساسها $r=2$

b) 7, 21, 24, 36, ...

$$\text{نلاحظ ان } \frac{u_2}{u_1} = \frac{21}{7} = 3, \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}$$

اذن هي ليست متتابعة هندسية $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{u_4}{u_3} = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

اذن هي متتابعة هندسية اساسها $r = \frac{1}{2}$

d) $4, -3, \frac{9}{4}, -\frac{7}{16}, \dots$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{-3}{4}, \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4} \div 3 = \frac{9}{4} \times \frac{-1}{3} = \frac{-3}{4}, \quad \frac{u_4}{u_3} = \frac{-27}{16} \div \frac{9}{4} = \frac{-27}{16} \times \frac{4}{9} = \frac{-3}{4}$$

اذن هي متتابعة هندسية اساسها $r = \frac{-3}{4}$

إذا كانت $\{u_n\}$ متتابعة هندسية أساسها r وحدها الأول $u_1 = a$ فمن التعريف نلاحظ أن

$$\begin{aligned}u_2 &= ru_1 = ar \\u_3 &= ru_2 = r(ar) = ar^2 \\u_4 &= ru_3 = r(ar^2) = ar^3\end{aligned}$$

$$u_n = ar^{n-1}$$

أي أن الحد النوني هو $u_n = ar^{n-1}$ حيث a حدها الأول r أساسها

مجموع n من متتابعة هندسية

مجموع n حدها من متتابعة حسابية نرسم له بالرمز S_n و يعطى بالقانون

$$S_n = \begin{cases} \frac{a[r^n - 1]}{r - 1} & r \neq 1 \\ an & r = 1 \end{cases}$$

حيث

N عدد الحدود المراد جمعها a الحد الأول r أساس المتتابعة

مثال: أوجد مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية $2, 6, 18, \dots$

من السؤال نجد أن $r=3$, $n=5$, $a=2$

بتطبيق القانون مباشرة نجد أن

$$S_n = \frac{a[r^n - 1]}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{2[3^5 - 1]}{3 - 1} = \frac{2[243 - 1]}{2} = 242$$

مثال: أوجد مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية $25, 50, 100, \dots$

من السؤال نجد أن $r=2$, $n=5$, $a=25$

$$S_n = \frac{a[r^n - 1]}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{25[2^5 - 1]}{2 - 1} = 25[32 - 1] = 25[31] = 775$$

مثال: أوجد مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 3 و أساسها يساوي نصف

$$\text{الحل: } S_n = \frac{a[r^n - 1]}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3\left(-\frac{31}{32}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{3 \times (-31)}{32} \cdot (-2) = \frac{186}{32}$$

6,#,150

من المعطيات نجد ان عدد جميع حدود المتتابعة هو 3

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_3 = 6r^{3-1} \rightarrow 150 = 6r^2 \rightarrow \frac{150}{6} = \frac{6}{6}r^2 \rightarrow r^2 = 25 \rightarrow r = 25$$

→ 6, 30, 150

مثال ٢: ادخل وسطاً هندسياً بين العددين 5,125

5,#,125

من المعطيات نجد ان عدد جميع حدود المتتابعة هو 3

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$\rightarrow 125 = 5r^{3-1} \rightarrow \frac{125}{5} = \frac{5}{5}r^2 \rightarrow r^2 = 25 \rightarrow r = 5$$

→ 5, 25, 125