تابع الفـصل السابع .

المحــددات ..

خواص المحددات:

سنتعرف خلال هذا البند على بعض خواص المحددات والتي تفيدنا في تسهيل عملية حسابها ومنها:

١. إذا وجد صف او عمود في مصفوفة مربعة بحيث كانت جميع عناصره اصفار، فان محدد تلك المصفوفة = 0

مثال: اوجد محدد كل مما يلي:

١# $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$

٢# $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 0$

٢. لا تتغير قيمة محدد مصفوفة إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة والاعمدة بالصفوف.

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 2 \times 5 - 3 \times -1 = 10 + 3 = 13$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 2 \times 5 - 3 \times -1 = 10 + 3 = 13$$

٣. عند استبدال صف بصف اخر او عمود بعمود اخر فان اشارة المحدد تتغير.

مثال: إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 13$$

لو تم تبديل الصف الصف الاول مع الصف الثاني لنحصل على المصفوفة B:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = -3 - 10 = -13$$

اما لو تم تبديل العمود الاول مع العمود الثاني فسوف نحصل على المصفوفة ولتكن C بحيث:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |C| = -3 - 10 = -13$$

٤. إذا تساوت العناصر المتقابلة في صفين او عمودين في مصفوفة ما فان محدد تلك المصفوفة = 0

مثال: لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$$

نلاحظ ان عناصر الصف الاول مساوية لعناصر الصف الثالث.

٥. إذا ضرب عناصر صف او عمود في المصفوفة A بعدد ثابت فان قيمة المحدد الناتج بعد عملية الضرب تساوي المحدد الاصلي مضروبا في ذلك العدد.

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 6 + 5 = 11$$

على فرض ضربنا عناصر الصف الثاني بالعدد 2- فتصبح المصفوفة A على الصورة التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = -12 - 10 = -22$$

$$\therefore 11 \times -2 = -22$$

مثال: إذا كان محدد مصفوفة A يساوي 3- وضربنا عناصر العمود الاول بالعدد 5- اوجد محدد المصفوفة بعد عملية الضرب؟

محدد المصفوفة بعد عملية الضرب $\rightarrow$ $|A| = -3$

$$-3 \times -5 = 15$$

٦. محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر.

مثال: اوجد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

الحل: $|A| = 6 \times -3 \times \frac{1}{9}$

$$= -\frac{9}{9} = -1$$

كيفية ايجاد النظير الضربي لمصفوفة مربعة:

تعريف النظير الضربي: إذا كان لدينا المصفوفة A واوجدنا مصفوفة اخرى لتكن B بحيث:

مصفوفة الوحدة $\leftarrow A \times B = B \times A = I$

عندئذ نقول بان المصفوفة B هي النظير الضربي للمصفوفة A وسيرمز للمصفوفة B بالرمز A^{-1} .

ولإيجاد النظير الضربي A^{-1} للمصفوفة A (من الرتبة 2×2) فانه يمكن استخدام الصيغة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

حيث: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

مثال: اوجد النظير الضربي للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: $|A| = -1 - 0 = -1$

$$A^{-1} = 1/-1 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

وللتأكد من صحة الحل:

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

مثال: اوجد النظير الضربي للمصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} ?$$

الحل: $|B| = 3 - (-2) = 5$

$$B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

للتأكد من صحة الحل:

$$B \times B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + 2/5 & -\frac{2}{5} + 2/5 \\ -\frac{3}{5} + 3/5 & \frac{2}{5} + 3/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

طريقة كريمر لحل نظام من المعادلات الخطية:

لنفرض ان لدينا النظام التالي من المعادلات:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

- سنعرف محدد المعاملات دلتا (Δ) كما يلي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

س المعادلة الاولى

س المعادلة الثانية

- سنحدد مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الاول في Δ بالحدود المطلقة $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$ ونجد محدد المصفوفة الجديدة وسنرمز له ΔX_1

$$\Delta X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

- سنستبدل كذلك عناصر العمود الثاني في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$ وسنرمز لمحدد هذه المجموعة بالرمز ΔX_2 بحيث تصبح كما يلي:

$$\Delta X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

- لإيجاد قيمة X_1 فإننا نقسم ΔX_1 على Δ ولإيجاد قيمة X_2 فإننا نقسم ΔX_2 على Δ

$$X_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \quad \text{و} \quad X_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$$

مثال: باستخدام طريقة كرايمر اوجد حل النظام التالي من المعادلات:

$$3x_1 + 4x_2 = 2$$

$$2x_1 + 5x_2 = 3$$

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = {}^{-2}/_{7} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = {}^{5}/_{7}$$

للتأكد من صحة الحل:

$$3\left(-2/_{7}\right) + 4\left(5/_{7}\right) = 2$$

$$-6/_{7} + 20/_{7}$$

14/7 = 2

$$2\left(-2/_{7}\right) + 5\left(5/_{7}\right) = 3$$

$$-4/_{7} + 25/_{7} = 21/_{7} = 3$$

مثال: حل النظام التالي:

$4X_1 - 2X_2 = 10$

$3X_1 - 5x_2 = 11$

باستخدام طريقة كرايمر؟

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -20 - (-6)$$

$$= -20 + 6 = -14$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -50 - (-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 30 = 14$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = 1$$

حتى نستطيع تطبيق هذه النظرية لا بد من ان $\Delta \neq 0$

علمتنى الرياضيات : أنه يمكننا الوصول لنتيجة صحيحة بأكثر من طريقة فلا تظن أنك وحدك صاحب الحقيقة وأن كل من خالفك مخطئ .. وايضا فى درس المصفوفات صفوا أمنياتكم وأحسنوا الظن بربكم فأمنياتكم اليوم هى واقعكم غدا بإذن الله تعالى

E7sas