الفصل الثاني .
العمليات الجبرية

سنتعرف في هذه المحاضرة على كل من المفاهيم التالية :

- مفهــوم الاسس .
- اللوغاريتمات.

اولا : مفهوم الأسس :

تعريف : اذا كان x عدد حقيقي مرفوع للقوة n (عدد صحيح)

فإن : ... $X^N = X.X.X.X$.......... n من المرات.

فمثلا نقول :

$$5^3 = 5.5.5$$

$$X^4 = X.X.X.X$$

ونلاحظ دائما بأن أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1

فنقول بأن : $X^0 = 1$

وكذلك في حالة وجود أس سالب ، فإنه يمكن تحويلة الى اس موجب حسب القاعدة التالية :

$$X^{-1} = \frac{1}{X}$$

وبشكل عام : $X^{-n} = \frac{1}{x^n}$

اما اذا كان : $\frac{x^{-n}}{y^{-m}} = \frac{y^m}{x^n}$

امثلة : بسط المقادير التالية .

١. $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3*3*3*3*3} = \frac{1}{81}$

٢. $(\frac{2}{3})^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

خــواص الاسس :

اذا كان $X,Y \in R$ وكـان $n,m \in Z$ فأن :

- $\mathbf{X^{N}. X^{M} = X^{N+M}}$

مثال :

- $\mathbf{X^{3} . X^{4} = X^{3+4} = X^{7}}$
- $\mathbf{X^{-5} . X^{-2} = X^{-5+ -2} = X^{-7} = \frac{1}{x^7}}$
- $\mathbf{X^{2} . Y^{-2} = X^{2} .\frac{1}{y^2} = \frac{ء^{2}}{y^2}}$

٢: اذا كـان :

$$\frac{x^n}{y^m} = X^{N-M}$$

فمثلا :

$$\frac{x^3}{x^5} = X^{3-5} = X^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}}{x.x.\cancel{x}.\cancel{x}.\cancel{x}} = \frac{1}{x.x} = \frac{1}{x^2}$$

مثال : بسط المقدار التالي :

- $\frac{x^{-3}}{x^{-5}} = X^{-3-(-5)} = X^{-3+5} = X^{2}$
- $\frac{x^{-3}}{x^5} = X^{-3-5} = X^{-8} = \frac{1}{x^8}$

٣: ان قيمة المقدار :

$$(X^{N})^{M} = X^{N.M}$$

مثال : اوجد قيمة ما يلي :

- $(\mathbf{X^{2}})^{3} = X^{2X3} = X^{6}$
- $(\mathbf{X^{-2}})^{3} = X^{-2X3} = X^{-6} = \frac{1}{6x}$
- $(\mathbf{X^{-2}})^{-3} == X^{-2X-3} = X^{-6} = x^6$

٤: قيمة المقدار :

$$(x.y)^N = X^N . Y^N$$

مثال :- اوجد قيمة مايلي بأبسط صورة :.

① $(5X)^2 = 5^2 \cdot X^2 = 25X^2$.

② $\left(\frac{16}{15}\right)^{-2} = \frac{16^{-2}}{15^{-2}} = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$.

او عكس الكسر أولاً

$\left(\frac{15}{16}\right)^2 = \frac{15^2}{16^2} = \frac{225}{256}$.

٥: قيمة المقدار :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^N = \frac{x^n}{y^n}$$

مثال على الخاصية الخامسة :

- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2^{-3}}{3^{-3}} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$
- $\left(\frac{2^3}{x^2}\right)^{-2} = \frac{(2^3)^{-2}}{(x^2)^{-2}} = \frac{2^{-6}}{x^{-4}} = \frac{x^4}{2^6} = \frac{x^4}{64}$

الجـــذور ..

تعريف : اذا كان كل من Y , X ينتمي R فان العدد X يسمى جذر n للعدد Y اذا كان :

حيث n : عدد صحيح و $X^N = Y$

فمثلا نقول : بأن العدد 5 هو الجذر التربيعي للعدد 25 اما العدد 5 فهو الجذر التربيعي للعدد 25 .

أما العدد 5 فهو الجذر التكعيبي والثالث للعد ١٢٥

ونقول بان العدد 2 هو الجذر السادس 64

ونلاحظ في مفهوم الجذور على الاعداد الحقيقية الخواص التالية :

١_ كل عدد موجب له جذران تربيعيان ، احدهما موجب والاخر سالب

فمثلا :

$$\sqrt{25} = \pm 5$$

اما اذا كان العدد سالب فليس له جذر تربيعي :

$\sqrt{-25}$ ليس له جذر حقيقي

٢_ في حالة الجذر التكعيبي ، فان العدد الموجب وكذلك العدد السالب جذر واحد فقط يشبه اشارة العدد تحت الجذر التكعيبي .

فمثلا :

$$\sqrt[3]{27} = 3:$$

اما $\sqrt[3]{-27} = -3$

تعريف : الاسس الكسرية :

اذا كان $n \geq 2$ حيث n عدد صحيح ، فانه يمكن تعريف المقدار التالي :

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

مثال : بسط كل من المقادير التالية بعد كتابتها على الصورة الجذرية :

$$\# \quad (16)^{1/2} = \sqrt{16} = 2 \; or \; -2$$

$$\# \quad (27)^{-1/3} = 1/27^{1/3} = 1/\sqrt[3]{27} = 1/3$$

$$\# \quad (27)^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\# \quad (1/25)^{1/2} = 1/\sqrt{25} = 1/5 \; or \; 1/-5$$

بعض القواعد الخاصة بالأسس :

اذا كان كل من

$x, y \in R^+$ **ونفرض ان** $n, m \in Z$ **فان :**

$$\# \quad \sqrt[n]{x^n} = x^{n/n} = x^{n/n} = x$$

$$\# \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \rightarrow (x^m)^{1/n} = x^{m/n}$$

$$\# \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \,.\, \sqrt[n]{y} = x^{1/n}.\, y^{1/n}$$

$$\# \quad \sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y} = x^{1/n}/y^{1/n} \quad , y \neq 0$$

مثال :اكتب كلا من المقادير التالية على الصورة الجذرية بأبسط صورة :

- $\sqrt[5]{x^5} = x^{5/5} = x$
- $\sqrt[4]{x^2} = x^{2/4} = x^{1/2}.\sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{x^6y^6} = (x^6)^{1/3}.(y^6)^{1/3} = x^{6/3}\,.\,y^{6/3} = x^2y^2$
- $\sqrt[3]{-٨/٢٧^{x^3}} = \sqrt[3]{-8/27}\,.\,\sqrt[3]{x^3} = -2/3\,.\,x^{3/3} = -2/3^x$

تمرين : اوجد قيمة كل من بأبسط صورة :

$$(1/2)^{-3} .\ (1/3)-2 = (2/1)^3 . (3/1)^2 = 2^3 . 3^2 = 8 \times 9$$
$$= 72$$

....

$$\sqrt[3]{125/y^3} . \sqrt[4]{16/x^4} = (125/y^3)^{1/3} . (16/x^4)^{1/4}$$
$$= (125)^{1/3}/(y^3)^{1/3} .\ (16)^{1/4}/(x^4)^{1/4} = \sqrt[3]{125}/y . \sqrt[4]{16}/x$$
$$= 5/y . 2/x = 10/x$$

....

$$(x)^0 + (9)^{1/2} - (8)^{-1/3} = 1 + \sqrt{9} - 1/\sqrt[3]{8} = 1 \pm 3 - 2$$

في حالة الموجب :

$$= 4 - 1/2 = 4/1 - 1/2 = 8/2 - 1/2 = 7/2$$

في حالة السالب :

$$= -2/1 - 1/2 = -4/2 - 1/2 = -5/2$$

مسائل وتمارين :- (مفهوم الأسس والجذور)

- اوجد قيمة كل مما يلي بأبسط صورة :-

1) $\sqrt[3]{-81} =$

2) $\dfrac{x^{-5}}{x^{-1/5}} =$

3) $\sqrt[4]{\dfrac{x^8}{16}}$

4) $\sqrt[9]{(x/y)^0}$.